

## ZUR REZIPROZITÄT IN DER AKUSTISCHEN LEITUNGSTHEORIE

K.-W. Hirsch, J. Herbertz

Ultraschalltechnik, Universität -GH- Duisburg

Einleitung

Lineare und zeitinvariante elektrische Systeme zur Übertragung von Leistung werden in der Vierpoltheorie durch Übertragungsmatrizen zwischen Toren mit den Klemmengrößen Spannung und Stromstärke beschrieben. Den Vierpolen oder Zweitoren wird die Eigenschaft der Reziprozität zugeschrieben, wenn die Vierpolmatrizen bestimmten formalen Kriterien genügen: Bei Vorzeichenkonvention nach Abb. 1 muß der Quotient der Nebendiagonalelemente  $+1$  sein bei der Impedanz- und der Admittanzmatrix, bei den Hybridmatrizen  $-1$ , die Kettenmatrix  $\underline{A}$  muß die Bedingung  $\det(\underline{A}) = -1$  erfüllen. Bei umgekehrten Vorzeichen spricht man von Antireziprozität. Sind die Beträge der Kriterien ungleich  $1$  wird das System bzw. die Übertragung als nicht-reziprok bezeichnet.

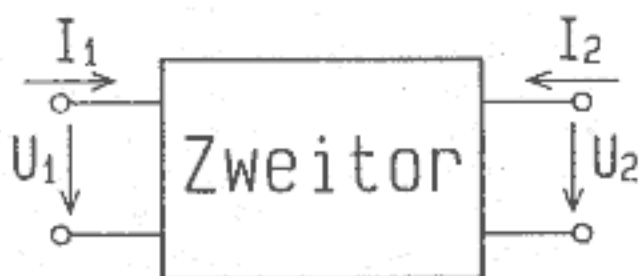


Abb. 1 Vorzeichenkonvention für die elektrischen Klemmengrößen

Lineare und zeitinvariante akustische Systeme lassen sich wie elektrische Systeme beschreiben. Z.B. wird ein Dehnenwellenleiter in gleicher Weise behandelt wie ein elektrischer Wellenleiter: an die Stelle des Klemmengrößenpaares Spannung und Stromstärke tritt das Paar Kraft und Schnelle. Auch hier gelten die oben genannten Kriterien der Reziprozität.

Probleme bei der Analyse der Reziprozität treten auf, wenn unterschiedliche Klemmengrößenpaare beteiligt sind. Ein Beispiel sind elektroakustische Wandler, an deren Toren die Klemmengrößenpaare Kraft und Schnelle einerseits und Spannung und Stromstärke andererseits auftreten. Bei Zweitoren dieser Art wird im allgemeinen die eine oder andere Analogie zwischen den Klemmengrößen unterschiedlicher Dimension angenommen, die dann zu Übertragungsmatrizen führt, die die Reziprozitätsbedingungen erfüllen. Dieses Problem ist in der Literatur häufig kontrovers behandelt worden.

Können elektroakustische Wandler in einfachsten Fällen noch als Zweitore behandelt werden, so besteht diese Möglichkeit z.B. bei Biegewellenleitern nicht: Biegewellen können hinsichtlich des Energieflusses als miteinander gekoppelte Scher- und Drehwellenanteile aufgefaßt werden, weil an jedem Ort der Biegewellenleitung Leistungen nur über die Klem-

mengrößenpaare Querkraft und Querschnelle bzw. Drehmoment und Drehgeschwindigkeit übertragen werden. Diese Klemmengrößenpaare können als ein Tor der Scher- bzw. der Drehwelle interpretiert werden. Die kleinste Anzahl der Tore bei der Beschreibung der Übertragungseigenschaften eines Leitungsstückes beträgt daher vier. Auch für dieses Beispiel eines akustischen Vieltore wird wegen der unterschiedlichen Klemmengrößenpaare eine systematische Analyse der Reziprozität benötigt.

Die Betrachtung der Reziprozität an Vieltoren mit unterschiedlichen Klemmengrößenpaaren bleibt nicht ohne Rückwirkung auf die Systematik der Beschreibung von Zweitoren.

### Klemmengrößen an Vieltoren

Im folgenden wird vorausgesetzt, daß die betrachteten elektrischen, elektroakustischen und akustischen Systeme Leistung nur an Toren übertragen, an denen jeweils zwei leistungsbezogenen kontragrediente Klemmengrößen auftreten und als Observable gemessen werden können. Dabei gelte die Konvention, daß das Vorzeichen der Leistung für alle Tore dasselbe ist, wenn der Energiefluß an den Toren in das System hinein gerichtet ist. Die Forderung nach Kontragredienz der Koordinatensysteme, in denen die Klemmengrößen gemessen werden, sichert auch in allgemeinen Koordinaten die Invarianz der Leistungsmessung, während der Leistungsbezug aus dimensionalen Gründen erforderlich ist.

Aus dem Erhaltungssatz der Energie folgt, daß bei Zeitumkehr das Meßergebnis für den Energiefluß, also für die Leistung, sein Vorzeichen umkehrt. Das hat Konsequenzen für das Klemmengrößenpaar: Bei Zeitumkehr kehrt eine und nur eine der beiden Klemmengrößen ihr Vorzeichen um /1/. Für die systematische Beschreibung der Vieltore erweist sich diese Unterscheidungsmöglichkeit der leistungsbezogenen Klemmengrößen als nützlich.

### Beschreibung der Vieltore

Das Übertragungsverhalten zwischen den  $n$  Toren des Vieltores wird durch  $n$  lineare Gleichungen beschrieben. Für die systematische Behandlung des Gleichungssystems ist es nicht nur erforderlich, die Klemmengrößenpaare nach Toren zu ordnen, sondern auch die Reihung der Klemmengrößen an jedem einzelnen Tor nach dem gleichen, vom Betrachter und vom Problem unabhängigen Kriterium vorzunehmen. Die Betrachtung des Verhaltens der Klemmengrößen bei Zeitumkehr liefert im Gegensatz zur Anwendung von Analogien genau dieses Kriterium.

Die Anwendung dieses Kriteriums führt bei akusto-akustischen Vieltoren dazu, daß die Reihung des Paares Kraft-Schnelle an allen Toren die gleiche ist. Bei elektro-akustischen Systemen folgt, daß die Reihung des Paares Kraft-Schnelle auf der elektrischen Seite keine Wahl läßt, sondern die Reihung Spannung-Stromstärke erzwingt.

Es zeigt sich, daß in einer denkökonomischen Systemtheorie elektroakustische Analogien der verschiedenen Arten völlig überflüssig, ja irreführend sein können. Die obigen Betrachtungen entheben uns der Notwendigkeit, bei Biegewellenleitern akusto-akustische Analogien zwischen den Klemmengrößenpaaren der Scherung und der Drehung einzuführen und gegebenenfalls zu begründen.

### Reziprozität von Vieltoren

Die Reziprozität von Vieltoren läßt sich auf die Reziprozität von Zweitoren zurückführen. Für die Entscheidung, ob die Übertragung zwischen zwei ausgewählten Toren eines Vieltors reziprok ist, ist es erforderlich, für die verbleibenden Tore beliebige lineare Zusammenhänge zwischen den jeweiligen Klemmengrößen vorzugeben, d.h., das Tor mit einer beliebigen torspezifischen Impedanz abzuschließen: Dann läßt sich das Gleichungssystem des Vieltors stets auf eine Vierpolmatrix reduzieren, die nach den oben aufgeführten Kriterien auf Reziprozität untersucht werden kann.

Ein Vieltor soll dann als reziprok bezeichnet werden, wenn es nicht möglich ist, eine Torpaarung zu finden, bei der die Reziprozität verletzt ist.

Die oben vorgestellte Vorgehensweise läßt sich an jedem Vieltor realisieren. Häufig ist es jedoch möglich, dieses u.U. langwierige Verfahren durch einfachere Tests auf Reziprozität zu ersetzen. Im folgenden wird am Tor 1 die bei Zeitumkehr invariant bleibende Klemmengröße mit  $X_1$  und die bei Zeitumkehr einem Vorzeichenwechsel unterliegende Klemmengröße mit  $Y_1$  bezeichnet. Ein einfacherer Test ist möglich, wenn sich das Gleichungssystem des  $n$ -Tors in die Form bringen läßt

$$\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_1 \\ \vdots \\ X_{n-1} \\ X_n \end{bmatrix} = \underline{Z} \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_1 \\ \vdots \\ Y_{n-1} \\ Y_n \end{bmatrix}$$

Die Matrix  $\underline{Z}$  wird hier als generalisierte Impedanzmatrix, ihre Koeffizienten  $Z_{kl}$  als generalisierte Impedanzen bezeichnet. In der Hauptdiagonalen von  $\underline{Z}$  treten torspezifische Impedanzen, sonst generalisierte Impedanzen auf. Beispiele für generalisierte Impedanzen sind Kraft/Stromstärke, Spannung/Schnelle, Querkraft/Drehgeschwindigkeit und Drehmoment/Querschnelle.

Durch Anwendung des oben formulierten Reziprozitätskriteriums für Vektore auf das Gleichungssystem läßt sich zeigen, daß die Reziprozitätsbedingungen in eine Aussage über die Matrix  $\underline{Z}$  zusammengefaßt werden können: Läßt sich aus dem Gleichungssystem eines n-Tores eine generalisierte Impedanzmatrix ableiten, liegt Reziprozität genau dann vor, wenn diese Matrix symmetrisch ist. Man erhält also für das n-Tor  $n(n-1)/2$  unabhängige Reziprozitätsbedingungen.

Die gleiche Aussage läßt sich auch auf eine generalisierte Admittanzmatrix übertragen: Läßt sich aus dem Gleichungssystem eines n-Tores eine generalisierte Admittanzmatrix ableiten, ist dieses Vektor genau dann reziprok, wenn seine Admittanzmatrix symmetrisch ist.

#### Viertor des Biegewellenleiters

In der Klasse der allgemeinen Vektore stellen Leitungsstücke einen einfachen Sonderfall dar, weil das Gleichungssystem aus einer geraden Anzahl von Gleichungen besteht und immer so separiert werden kann, daß eine Kettenmatrix die Übertragung beschreibt.

Die Kettenmatrix des Biegewellenleiters ist vom Range 4. Sie verknüpft die Tore Querkraft-Querschnelle und Drehmoment-Drehgeschwindigkeit am Eingang des Leitungsstückes mit den entsprechenden Toren an seinem Ausgang /2/. Bei einer Aussage zur Reziprozität beschränkt man sich häufig auf die Untersuchung der Determinante der Kettenmatrix. Aus den obigen Überlegungen wird aber deutlich, daß die Reziprozität des Viertors Biegewellenleiter durch sechs unabhängige Bedingungen gekennzeichnet sein muß. Diese sechs Nebenbedingungen beschränken die Anzahl der unabhängigen Koeffizienten der Kettenmatrix auf 10 und nicht auf 15, wie es allein die Determinantenregel, die nur eine zusätzliche Gleichung zwischen den Koeffizienten darstellt, ergibt.

#### Literatur

- /1/ Lampton M.; Burke, J. R.: Time Reversal and Reciprocity, *Acustica* 56(1984)S.23-28
- /2/ Herberth, J.; Hirsch, K.-W.: Zur Berechnung von Ultraschall-Schwingern mit Longitudinal-Biegekopplung, Fortschritte der Akustik, FASE/DAGA'82, Göttingen 1982, S.795-798