Kaustiken bei Schallausbreitung in der Atmosphäre

Till Kühner

Cervus Consult, Willich, kuehner@cervus.de

Einleitung

In der Atmosphäre ändern sich Temperatur und Luftfeuchte mit der Höhe, und damit auch die Schallgeschwindigkeit. Möchte man die Einflüsse dieser Änderungen auf die Schallausbreitung untersuchen, dann stößt man schnell auf das Problem, dass sich exakte Lösungen nur selten finden lassen. Das heißt, man kann nicht einfach die Bewegungsgleichung nehmen, eine höhenabhängige Schallgeschwindigkeit einsetzen, und die Differentialgleichung lösen.

Zugang zur Behandlung dieses Problems bietet die Eikonalapproximation, bei der die Bewegungsgleichung so vereinfacht wird, dass man für jeden Ort eine Amplitude hat, und einen Wellenvektor, der die lokale Ausbreitungsrichtung angibt.

In Abb. 1 ist der trivialste Fall dargestellt, mit konstanter Schallgeschwindigkeit und ohne Bodenreflektion. Die farbliche Darstellung soll den Schalldruck zu einem Zeitpunkt darstellen, der linear mit dem Abstand von der Quelle fällt. In einer zeitabhängigen Darstellung würde man sehen, wie sich die Wellen von der Quelle ausbreiten. Die als schwarze Linien eingezeichneten Strahlen zeigen dabei die Ausbreitungsrichtung an, genau genommen die Richtung des Energieflusses. Erkennbar aus dem einfachen Fall ist, dass der Abstand zwischen den Strahlen mit dem Abstand von der Quelle zunimmt, und entsprechend dem Abstand zwischen den Strahlen die Schalldruckamplitude abnimmt.

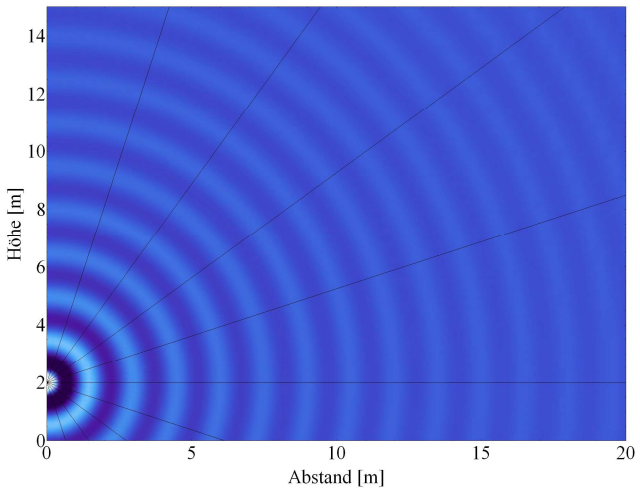

Abbildung 1: Schallausbreitung mit konstanter Schallgeschwindigkeit und ohne Bodenreflektion. Quelle auf 2m Höhe.

Linear steigende Schallgeschwindigkeit

Eine gängige vereinfachende Annahme für die Bedingungen in der Atmosphäre ist eine mit der Höhe linear steigende Schallgeschwindigkeit. In Abb. 2 ist der Schalldruck zu einem Zeitpunkt dargestellt. Da die Schallgeschwindigkeit mit der Höhe steigt, überholen die Phasenfronten im oberen Bereich die unteren. Entsprechend wird die Ausbreitungsrichtung nach unten gekrümmt. Die Strahlen liegen in diesem Fall auf Kreisbögen. Der Abstand zwischen den Strahlen nimmt mit dem Abstand zu, entsprechend sinkt die Schalldruckamplitude.

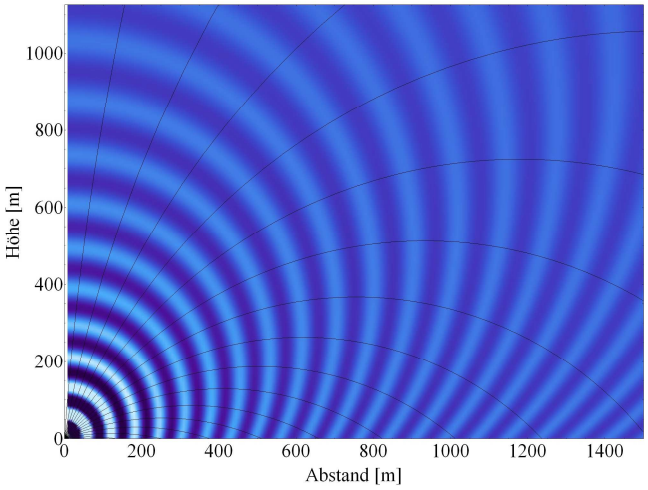

Abbildung 2: Schallausbreitung bei linear steigender Schallgeschwindigkeit, ohne Bodenreflektion. Quelle auf 2m Höhe

Reflektion am schallharten Boden

Um auch Bodenreflektionen zu berücksichtigen, wird als einfachster Fall der schallharte Boden gewählt. Die Strahlen werden am Boden im Einfallswinkel gleich Ausfallwinkel reflektiert, ohne Phasendrehungen oder Reflektionsverluste. Da damit schnell ein unübersichtliches Bild entsteht, sind in Abb. 3 nur Strahlen aus einem kleinen Bereich der Abstrahlwinkel dargestellt.

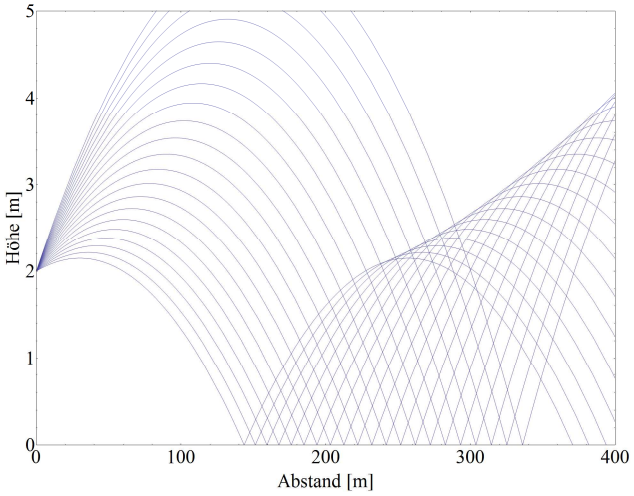

Abbildung 3: Strahlen vor und nach der ersten Reflektion am schallharten Boden

Kaustik

Bei genauer Betrachtung erkennt man in Abb. 3, dass sich nach der Bodenreflektion benachbarte Strahlen erst annähern, und dann sogar schneiden.

Man kann sich vorstellen, dass zwischen zwei benachbarten Strahlen ein konstanter Energiefluss eingeschlossen ist. Entfernen sich die Strahlen voneinander, wird der Energiefluss verteilt, die Flussdichte sinkt, und entsprechend sinkt der Pegel mit dem Abstand. Nähern sich zwei benachbarte Strahlen, dann wird der dazwischen eingeschlossene Energiefluss zusammengedrängt, und der Pegel steigt, obwohl der Abstand zur Quelle zunimmt.

Schneiden sich die Strahlen, dann wird der Energiefluss auf einen Punkt zusammengequetscht, der Pegel diverigiert. Passiert das, spricht man von einer Kaustik. In Abb. 3 sieht man, dass sich entlang einer Linie jeweils die benachbarten Strahlen schneiden, in solchen Fällen wird die ganze Linie als Kaustik bezeichnet. In den Bereich oberhalb der Kaustik kommen gar keine der reflektierten Strahlen, diesen Bereich nennt man Schattenzone. Entsprechend liegt auf der anderen Seite der Kaustik die beleuchtete Zone.

Aus der Optik vertraute Beispiele für Kaustiken sind die hellen Linien, die sich hinter einem Glas bilden, durch das Licht fällt, oder die Linien am Grund unter einer Wasseroberfläche.

Abb. 4 zeigt in schwarz das Schalldruckquadrat in der Nähe der Kaustik, wie es sich aus dem Strahlenmodell ergibt. Der Schalldruck divergiert bei Annäherung von der beleuchteten Zone an die Kaustik, und ist in der Schattenzone einfach Null.

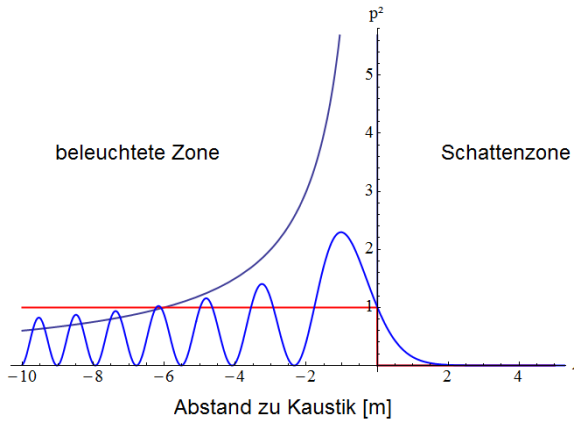

Abbildung 4: Das Schalldruckquadrat an der Kaustik (Abstand mit negativen Werten in der beleuchteten Zone, bei 0 die Kaustik, positive Werte in der Schattenzone)

Um überhaupt mit Strahlenmodellen arbeiten zu können, muss die Eikonalapproxitation gültig sein. Und diese fordert, dass sich das Pegelfeld langsam (im Verhältnis zur Wellenlänge) ändert. Vor allem muss das Pegelfeld kontinuierlich sein, was in dieser Form an der Kaustik nicht erfüllt wäre. Entsprechend ist die Eikonalapproximation ungültig, und ein einfaches Strahlenmodell liefert an diesem Punkt keine Lösung.

In Abb. 4 ist in rot alternativ das Schalldruckquadrat für ein Strahlenmodell eingezeichnet, dass bei der Bestimmung der Pegel die Energieflussdichte vernachlässigt. Auch in diesem Fall bleibt die Diskontinuität an der Kaustik, durch die die Eikonalapproximation ungültig wird.

Bewegungsgleichung

Da die Näherung mit Strahlen im Bereich der Kaustik problematisch ist, kann man versuchen, in diesem Bereich näherungsweise mit der Bewegungsgleichung zu arbeiten.

Ersetzt man die lineare steigende Schallgeschwindigkeit so, dass der Kehrwert linear steigt, erhält man eine einfache Form, die für Ebene Wellen lösbar ist, einen horizontalen Anteil mit einer harmonischen Welle hat, und einen vertikalen Anteil, der durch die Airy-Funktion gegeben ist.

In Abb. 3 sieht man, dass direkt nach der Bodenreflektion die Strahlen annähernd parallel laufen, und damit näherungsweise lokal als Ebene Wellen betrachtet werden können.

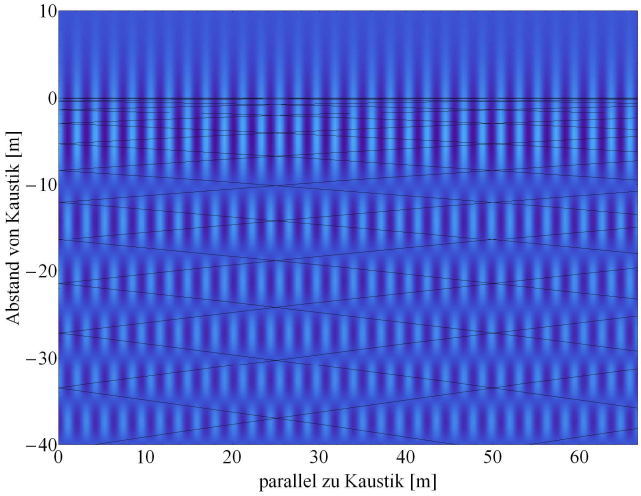

Abbildung 5: Ebene Welle, die auf eine horizontale Kaustik trifft

In Abb. 5 ist die Lösung der Bewegungsleichung für eine diagonal auf die Kaustik treffende Ebene Welle dargestellt. In einer zeitabhängigen Darstellung würde man sehen, wie die horizontalen Wellen parallel zur Kaustik laufen. In der beleuchteten Zone entsteht ein Interferenzmuster, in dem die Knotenpunkte durch die Nullstellen der Airy-Funktion gegeben sind. In die Schattenzone kommt ein endlicher, kontinuierlich abfallender Schalldruck. Der Verlauf des Schalldruckquadrats ist Abb. 4 als blaue Linie dargestellt, und einfach durch die Airy-Funktion gegeben.

Die schwarzen Linien in Abb. 5 sind die ursprünglich erwarteten Strahlverläufe, die in dieser Darstellung nicht zuzuordnen sind. Die in Abb. 5 gezeigte Lösung lässt sich jedoch in eine einfallende und ausfallende Welle teilen.

In Abb. 6 ist die einfallende Welle dargestellt, in Abb. 7 die reflektierte Welle. In schwarz sind die jeweils zugehörigen Strahlverläufe eingezeichnet. In der beleuchteten Zone ergibt sich ein ganz normales Wellenbild, die in Abb. 5 sichtbaren Muster sind nur durch Interferenz zwischen den einfallenden und reflektierten Wellen entstanden.

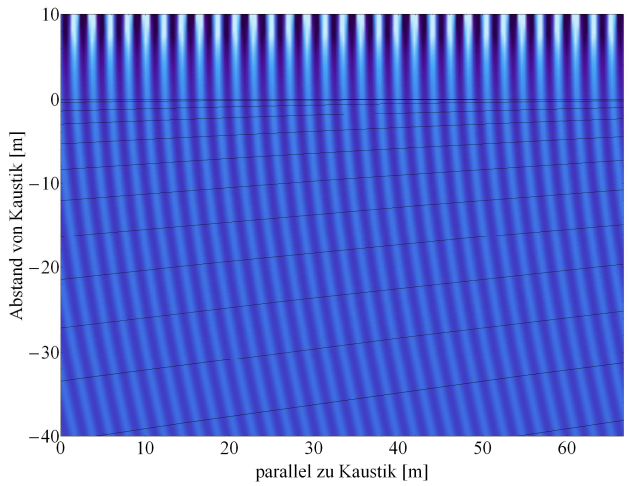

Abbildung 6: An der Kaustik einfallende Welle

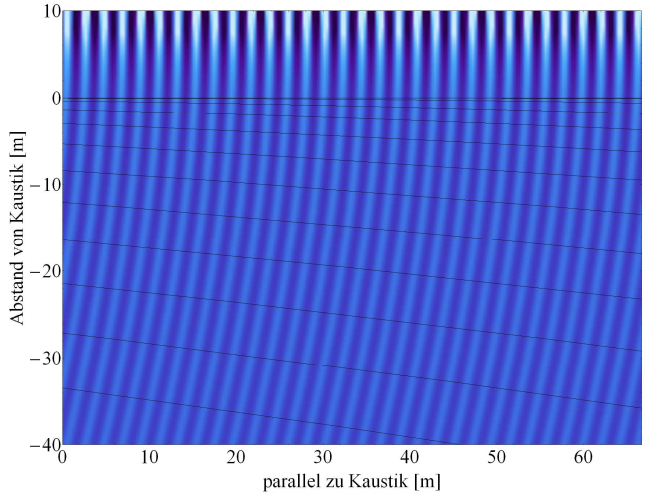

Abbildung 7: An der Kaustik reflektierte Welle

Während die Teillösungen in der beleuchteten Zone sinnvoll Strahlen zugeordnet werden können, divergieren die Teillösungen in der Schattenzone, d.h. das Feld in der Schattenzone kann nur sinnvoll als Ergebnis aus der Summe aus ein- und ausfallender Welle betrachtet werden, die in Abb. 4 und 5 dargestellt ist.

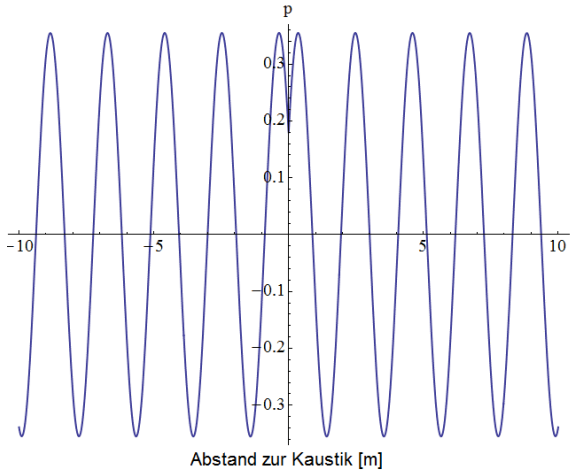

Abbildung 8: Schalldruck auf einem Strahl, der durch die Kaustik läuft. Genau an der Kaustik kommt es zu einem Phasensprung

Betrachtet man den Schalldruck entlang eines Strahls, dann ergibt sich der in Abb. 8 dargestellte Verlauf. Hierbei werden die Teillösungen aus der einfallenden und der reflektierten Welle zusammengesetzt. Dabei entsteht am Durchgang durch Kaustik ein Phasensprung von $\pi/2$, ansonsten bleibt die Sinusform der Welle im Wesentlichen enthalten.

Zusammenfassung

Bei der Schallausbreitung in Atmosphären mit Schallgeschwindigkeiten, die mit Höhe steigen, kommt es nach der ersten Bodenreflektion zu Kaustiken. An diesen Kaustiken sind die Bedingungen für die Eikonal-approximation nicht erfüllt, Ausbreitungsrechnungen mit Strahlen verlieren somit ihre Gültigkeit.

Die mögliche Lösung des lokalen Feldes zeigt, dass die Pegel an der Kaustik nicht divergieren, sondern endlich bleiben, und dass ein Teil des Feldes in die Schattenzone reicht.

Die Strahlen können durch die Kaustik verfolgt werden, und erfahren dabei einen Phasensprung von $\pi/2$ beim Durchgang durch die Kaustik. Zu einer Streuung an der Kaustik, die zu einem Energieverlust der Strahlen führen, kommt es dabei nicht.

Fazit

Bei Berechnungen mit Strahlmodellen müssen die Durchgänge durch Kaustiken berücksichtigt werden, weil sie zu Phasensprüngen führen. Da es zu keinen Energieverlusten an der Kaustik kommt, können Pegel weit entfernt von der Kaustik im Rahmen des Strahlenmodells bestimmt werden. In der Nähe der Kaustiken können die Pegel unter Nutzung der Airy-Funktion berechnet werden.

Bemerkungen

Der in dieser Veröffentlichung genutzte Lösungsansatz für den Umgang mit der Kaustik findet sich bei Kravtsov [1] unter 4.2.2 . Durch die direkte Lösung mit Airy-Funktionen ergibt sich darin auch direkt das Feld in der Schattenzone.

In anderen Ansätzen wird davon ausgegangen, dass es an der Kaustik zu Streuungen kommt, die zu gestreuten Strahlen mit komplexen Wellenvektoren führen. Die dabei entstehenden Integrale führen zwar im Prinzip zu den gleichen Ergebnissen, sind aber deutlich schwieriger zu interpretieren.

Literatur

[1] Kravtsov, Orlov: Caustics, Catastrophes and Wave Fields. Springer Series on Wave Phenomena